Realizacija diskretnih sistema

Koji tip filtra?

Ako fazna karakteristika nije od interesa, prednost u pogledu složenosti realizacije nesumnjivo leži na strani IIR filtarskih funkcija jer se zadate specifikacije ostvaruju sa znatno nižim redom funkcije prenosa, odnosno sa manjim brojem množača u realizacionoj strukturi. Na primer, za iste specifikacije, red FIR filtarske funkcije može biti pet do deset puta veći.

Takođe, ako su gabariti za amplitudsku karakteristiku zadati kao delimično konstantne funkcije, postupak sinteze je vrlo jednostavan jer se može koristiti bilinearna transformacija i standardni postupci sinteze analognih filtarskih funkcija. Situacija postaje nešto složenija ako su specifikacije za amplitudsku karakteristiku nestandardne. U tom slučaju se i za projektovanje IIR funkcija mora koristiti neki optimizacioni algoritam, ali je prednost u pogledu složenosti realizacije i dalje na strani IIR funkcija.

Ako je potrebno tačno realizovati linearnu faznu karakteristiku onda se moraju primeniti FIR filtarske funkcije, kojima se, za razliku od IIR filtarskih funkcija, tačno može realizovati linearna fazna karakteristika.

Najsloženije je donošenje odluke u slučajevima kada treba sintetizovati selektivnu filtarsku funkciju koja treba da u propusnom opsegu ima približno, ali ne egzaktno, linearnu faznu karakteristiku.

Ovakva funkcija se može sintetizovati i kao IIR filtar sa korekcijom grupnog kašnjenja, ali i kao optimalni FIR filtar. Detaljna ispitivanja većeg broja FIR filtara I IIR filtara eliptičkog tipa sa korigovanim grupnim kašnjenjem pokazuju da je složenost realizacije manja kod FIR filtarske funkcije ako je dozvoljena greška grupnog kašnjenja manja od 10%. Na primer, ako je dozvoljena greška grupnog kašnjenja u propusnom opsegu 3%, onda IIR eliptički filtar sa korigovanim grupnim kašnjenjem ima oko 30% više množenja po ulaznom odbirku od odgovarajućeg optimalnog FIR filtra. Ukupno grupno kašnjenje je uvek manje kod FIR filtra.

Treba realizovati

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]$$

M, *N* red polinoma
Malo smo promenili granice suma. Nebitno je. Da Vas ne zbuni što je to ranije skoro uvek bilo *M*-1 ili *N*-1

Realizacija:
- Softverski
- Hardverski

Računarska efikasnost (softverska ili hardverska)
Memorijski zahtevi
Uticaj konačne dužine reči

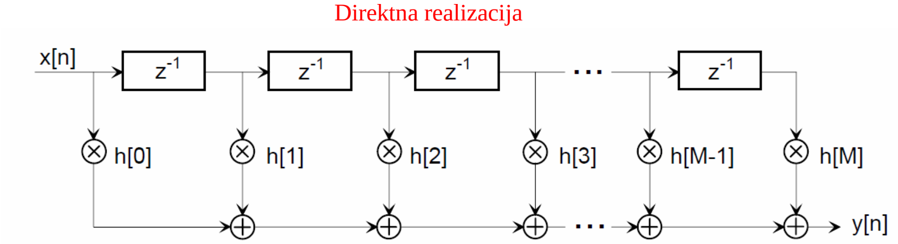
Realizacija FIR filtarske strukture

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Impulsni odziv $h[n] = \begin{cases} b_n, & 0 \le n \le M \\ 0, & n < 0,\ n > M \end{cases}$

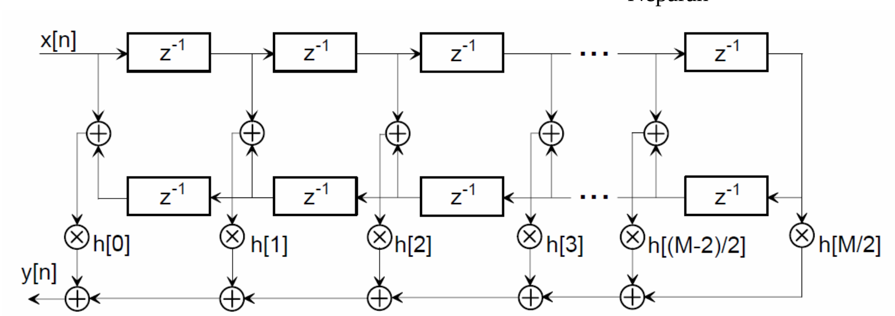
Direktna realizacija



Direktna realizacija - jednostavnije

Koristimo osobine
- Simetričan
- Antisimetričan
- Paran
- Neparan

$$h[n] = \pm h[M-n]$$



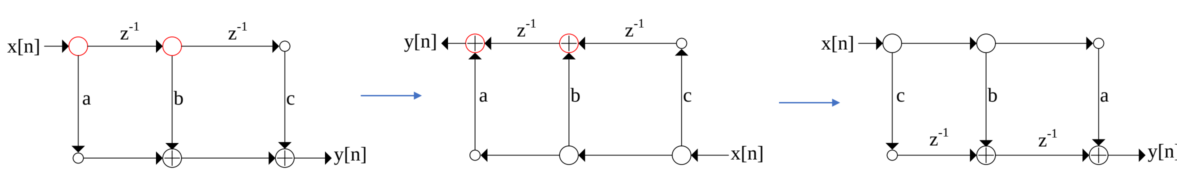
M parno simetričan

7

Iz teorije grafova: transpozicijom grafa toka može se dobiti ekvivalentna struktura koja ima istu funkciju prenosa.

Transpozicija grafa se vrši tako što se:
- svim granama promeni smer,
- čvorovi grananja postaju sabirači
- dok sabirači postaju tačke grananja
- ulazni i izlazni priključak zamenjuju uloge

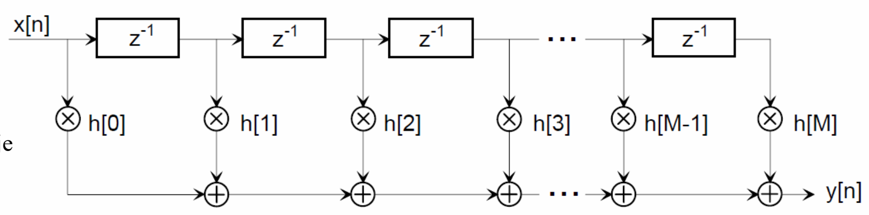
Kod grafa toka podataka, čvorovi predstavljaju izračunavanje, a smer predstavlja put podataka



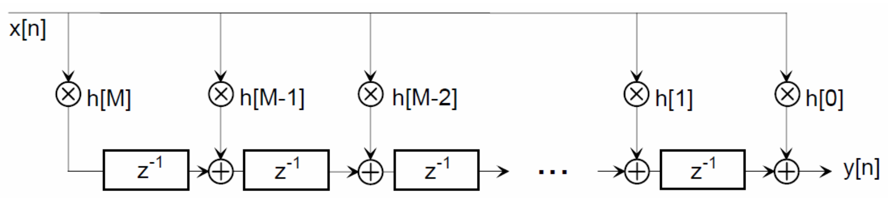
8

Transponovana direktna realizacija

U memoriji prave vrednosti odmeraka.
Puno računa da se dobije izlazni odmerak.



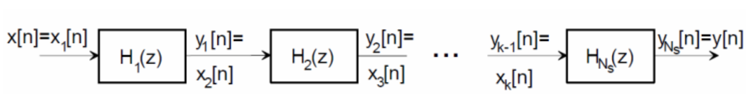
U memoriji „neke“ vrednosti.
Izlazni odmerak se „odmah“ dobija.

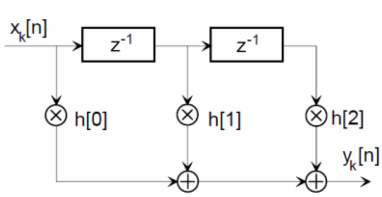


Broj računskih operacija (kola) isti.
Potrebna memorija ista.
Koja je bolja?

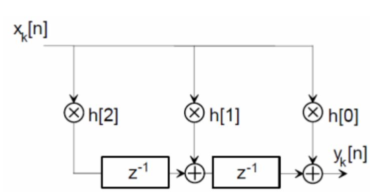
Kaskadna realizacija

$$H(z)=\sum_{n=0}^{M} b_n z^{-n}=\prod_{k=1}^{N_s} H_k(z)=\prod_{k=1}^{N_s}\left(b_{0k}+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}\right)$$





direktna



transponovana

U pogledu broja upotrebljenih komponenata, direktna i kaskadna realizacija su praktično ekvivalentne, pošto se ćelije drugog reda mogu realizovati i sa samo dva množača a ne sa tri kako je predstavljeno na slici.

Naime, deljenjem koeficijenata *k-te sekcije sa* b_{0k} *jedan od* koeficijenata u funkciji prenosa ćelije se svodi na jedinicu, - eliminiše se jedno množenje.

Međutim, kaskadna realizacija je modularna, što je veoma pogodno za hardversku realizaciju.

U slučaju softverske realizacije nijedna od realizacija nema izrazitu prednost.
Ako se FIR filtar realizuje softverski najpogodnija je direktna realizacija.

Realizacija na osnovu odbiraka u frekvencijskom domenu

Da se podsetimo

Odmerci na učestanostima $\Omega_k = \dfrac{2\pi k}{M+1}, k = 0,1,\ldots,M$

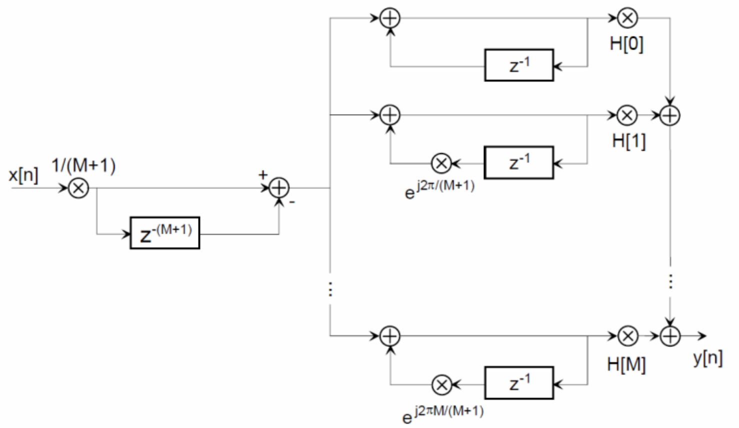
$$H[k] = H\left(\frac{2\pi k}{M+1}\right) = \sum_{n=0}^{M} h[n] e^{-j2\pi kn/(M+1)}, \ k = 0,1,\ldots,M$$

$H[k]$ predstavlja DFT sekvence od $M+1$ elemenata, $h[n]$.
$h[n]$ IDFT od $H[k]$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{M}\left(\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} H[k] e^{j2\pi kn/(M+1)}\right) z^{-n}$$

$$H(z)=\sum_{n=0}^{M} h[n]z^{-n}=\sum_{n=0}^{M}\left(\frac{1}{M+1}\sum_{k=0}^{M} H[k]e^{j2\pi kn/(M+1)}\right)z^{-n}$$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M} H[k]\left(\frac{1}{M+1}\sum_{n=0}^{M}[e^{j2\pi k/(M+1)}z^{-1}]^{n}\right)=\frac{1-z^{-(M+1)}}{M+1}\sum_{k=0}^{M}\frac{H[k]}{1-e^{j2\pi k/(M+1)}z^{-1}}$$



Češljasti – comb filtar

$$H_1(z)=\frac{1}{M+1}[1-z^{-(M+1)}] \qquad z_k=e^{j2\pi k/(M+1)},\ k=0,1,\ldots,M$$

M+1 filtara prvog reda - rezonatora

$$H_2(z)=\sum_{k=0}^{M}\frac{H[k]}{1-e^{j2\pi k/(M+1)}z^{-1}} \qquad p_k=e^{j2\pi k/(M+1)},\ k=0,1,\ldots,M$$

Položaji polova rezonatora poklapaju se sa položajima nula češljastog filtra.
Vrednosti konstanti u množačima odgovaraju vrednostima odbiraka željenog frekvencijskog odziva.

Opisana struktura je izuzetno pogodna za realizaciju filtarskih funkcija sa uskim propusnim opsegom jer je tada većina odbiraka frekvencijskog odziva jednaka nuli, tako da te grane ne postoje u realizaciji.

U takvim slučajevima je realizacija na bazi odbiraka iz frekvencijskog odziva ekonomičnija od direktne realizacije u pogledu broja množača i sabirača.

Rešetkasta realizacija

Rešetkasta realizacija FIR sistema se u velikoj meri razlikuje od do sada opisanih realizacija. Zbog svojih dobrih osobina u pogledu osetljivosti, kao i zbog modularnosti strukture, rešetkasta realizacija ima veliku primenu u obradi govora, u realizaciji adaptivnih filtara, estimaciji spektra i modelovanju signala.
Posmatrajmo niz FIR sistema koji su opisani funkcijama prenosa

$$H_M(z) = A_M(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = 1 + \sum_{k=1}^{M} \alpha_M[k] z^{-k}, \quad M \geq 1$$

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^{M} \alpha_M[k] x[n-k] = x[n] - \hat{x}[n]$$

predviđanje (predikcija) vrednosti tekućeg odbirka signala x[n] na osnovu vrednosti prethodnih odbiraka

$$h_M[k] = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \alpha_M[k] & 1 \leq k \leq M \\ 0 & k < 0,\ k > M \end{cases}$$

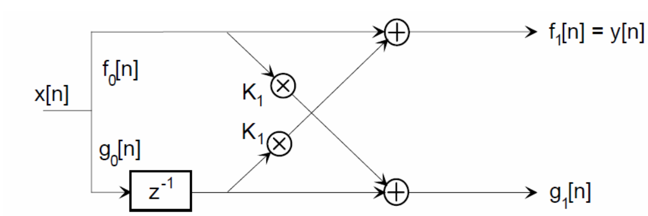
$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^{M} \alpha_M[k] x[n-k]$$

y[n] predstavlja grešku između stvarne i predviđene vrednosti odbirka x[n] greška predikcije

Da vidimo za M=1

$$y[n] = x[n] + \alpha_1[1] x[n-1]$$

Napravimo strukturu



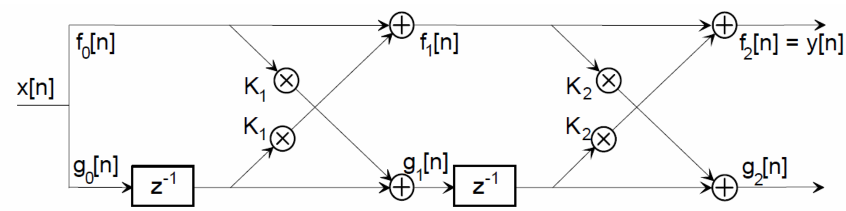
$$f_1[n] = x[n] + K_1 x[n-1]$$
$$g_1[n] = K_1 x[n] + x[n-1]$$

$$y[n] = f_1[n] \quad \rightarrow \quad K_1 = \alpha_1[1]$$

Liči da nam g ne treba

Za M=2

$$y[n]=x[n]+\alpha_2[1]x[n-1]+\alpha_2[2]x[n-2]$$



$$f_1[n]=x[n]+K_1x[n-1]$$
$$g_1[n]=K_1x[n]+x[n-1]$$
$$f_2[n]=f_1[n]+K_2g_1[n-1]$$
$$g_2[n]=K_2f_1[n]+g_1[n-1]$$

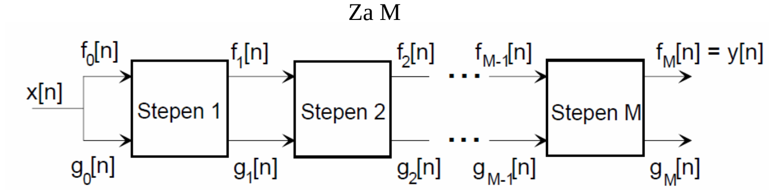
$$y[n]=f_2[n]\rightarrow$$

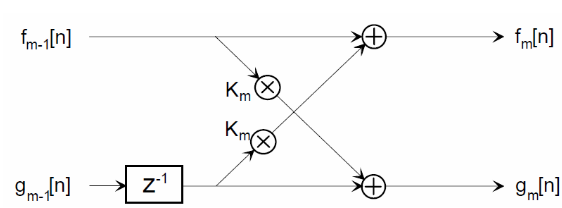
$$\alpha_2[2]=K_2,\ \ \alpha_2[1]=K_1(1+K_2)$$

$$K_1=\frac{\alpha_2[1]}{1+\alpha_2[2]},\ \ K_2=\alpha_2[2]$$

Znači moguće izračunati K_j na osnovu α[i], izlazi isti!

Za M





$$f_0[n]=g_0[n]=x[n]$$
$$f_m[n]=f_{m-1}[n]+K_mg_{m-1}[n-1],\ \ m=1,\dots,M$$
$$g_m[n]=K_mf_{m-1}[n]+g_{m-1}[n-1],\ \ m=1,\dots,M$$
$$y[n]=f_M[n]$$

Šta je to g

$$g_M[n] = K_M f_{M-1}[n] + g_{M-1}[n-1]$$
$$= K_M\left(f_{M-2}[n] + K_{M-1}g_{M-2}[n-1]\right) + \left(K_{M-1}f_{M-2}[n-1] + g_{M-2}[n-2]\right)$$
$$= K_M f_{M-2}[n] + K_M(1+K_{M-1})g_{M-2}[n-1] + K_{M-1}f_{M-2}[n-1]$$
$$\cdots$$
$$= \alpha_M[M]x[n] + \alpha_M[M-1]x[n-1] + \cdots + \alpha_M[1]x[n-M+1] + \alpha_M[0]x[n-M]$$
$$= \sum_{k=0}^{M}\alpha_M[M-k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{M}\beta_M[k]x[n-k] \qquad \beta_M[k] = \alpha_M[M-k],\ \ k = 0,1,\ldots,M$$

$$y[n] = x[n] + \sum_{k=1}^{M}\alpha_M[k]x[n-k] = x[n] - \hat{x}[n]$$

$$\hat{x}[n] = -\sum_{k=1}^{M}\alpha_M[k]x[n-k]$$ predikcija unapred (forward prediction)

Teorija linearne predikcije

$$\hat{x}[n-M] = -\sum_{k=1}^{M}\beta_M[k]x[n-k]$$ predikcija unazad (backward prediction) - g

U z domenu

$$Y(z) = F_M(z) = A_M(z)X(z)$$
$$G_M(z) = B_M(z)X(z)$$

$$B_M(z) = \sum_{k=0}^{M}\beta_M[k]z^{-k} = \sum_{k=0}^{M}\alpha_M[M-k]z^{-k} = z^{-M}\sum_{l=0}^{M}\alpha_M[l]z^{l} = z^{-M}A_M(z^{-1})$$

$$F_0(z) = G_0(z) = X(z)$$
$$F_m(z) = F_{m-1}(z) + K_m z^{-1}G_{m-1}(z), \quad m = 1,\ldots,M$$
$$G_m(z) = K_m F_{m-1}(z) + z^{-1}G_{m-1}(z), \quad m = 1,\ldots,M$$
$$Y(z) = F_M(z)$$

$$A_0(z) = B_0(z) = 1$$
$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, \dots, M$$
$$B_m(z) = K_m A_{m-1}(z) + z^{-1} B_{m-1}(z), \quad m = 1, \dots, M$$
$$H_M(z) = A_M(z)$$

$$\begin{bmatrix} A_m(z) \\ B_m(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & K_m \\ K_m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{m-1}(z) \\ z^{-1} B_{m-1}(z) \end{bmatrix}$$

$$\sum_{k=0}^{M} \alpha_M[k] z^{-k} = \sum_{k=0}^{M} \alpha_{M-1}[M-k] z^{-k} + K_M \sum_{k=0}^{M} \alpha_{M-1}[M-k] z^{-(k+1)}$$
$$\alpha_m[0] = 1$$
$$\alpha_m[M] = K_m$$
$$\alpha_m[k] = \alpha_{m-1}[k] + K_m \alpha_{m-1}[m-k] = \alpha_{m-1}[k] + \alpha_m[m] \alpha_{m-1}[m-k]$$

Obrnuta veza, tj. određivanje koeficijenata rešetkaste realizacije na osnovu koeficijenata direktne realizacije FIR filtra,

$$A_m(z) = A_{m-1}(z) + K_m z^{-1} B_{m-1}(z) = A_{m-1}(z) + K_m [B_m(z) - K_m A_{m-1}(z)]$$

$$A_{m-1}(z) = \frac{A_m(z) - K_m B_m(z)}{1 - K_m^2}, \quad m = M, M-1, \dots, 1$$

$$K_m = \alpha_m[m],$$
$$\alpha_{m-1}[0] = 1,$$
$$\alpha_{m-1}[k] = \frac{\alpha_m[k] - K_m \beta_m[k]}{1 - K_m^2} = \frac{\alpha_m[k] - \alpha_m[m] \alpha_m[m-k]}{1 - \alpha_m^2(m)}, \quad k = 1, \dots m-1$$

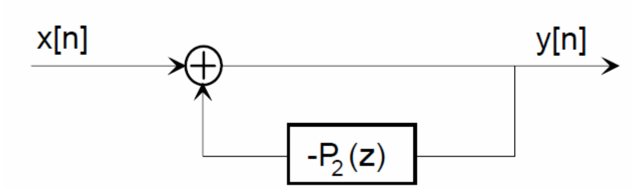
Složenost rešetkaste realizacije FIR sistema veća je od složenosti direktne realizacije. Naime, rešetkasta realizacija FIR sistema M-tog reda zahteva $2M$ množača, $2M$ sabirača i M elemenata za kašnjenje. Isti FIR sistem se može realizovati direktnom realizacijom koja sadrži $M+1$ množača, M sabirača i M elemenata za kašnjenje, dakle sa $M-1$ množača i M sabirača manje. Zbog toga se rešetkasta realizacija ne koristi u implementaciji FIR sistema sa konstantnim koeficijentima. Međutim, u realizaciji adaptivnih sistema, kao i u realizaciji autoregresivnih sistema za modelovanje signala, rešetkasta struktura ima izrazite prednosti. Rešetkasta struktura se takođe koristi u sistemima za obradu govora gde do izražaja dolaze njena svojstva predikcije kao i mogućnost povećanja reda sistema bez izmene koeficijenata u prethodnim stepenima realizacije.

Realizacija IIR filtarske strukture

Direktna realizacija

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{P_1(z)}{1+P_2(z)}=H_1(z)H_2(z)$$

Samo polove

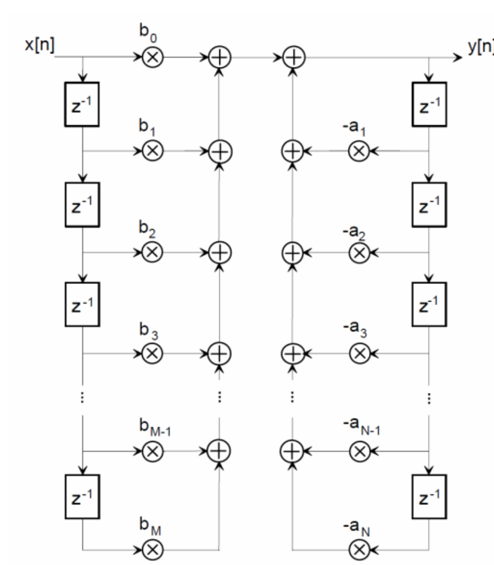


Direktna realizacija 1

$$H(z)=\frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{P_1(z)}{1+P_2(z)}=H_1(z)H_2(z)$$

$$H_1(z)=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

$$H_2(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}=\frac{1}{1+P_2(z)}$$

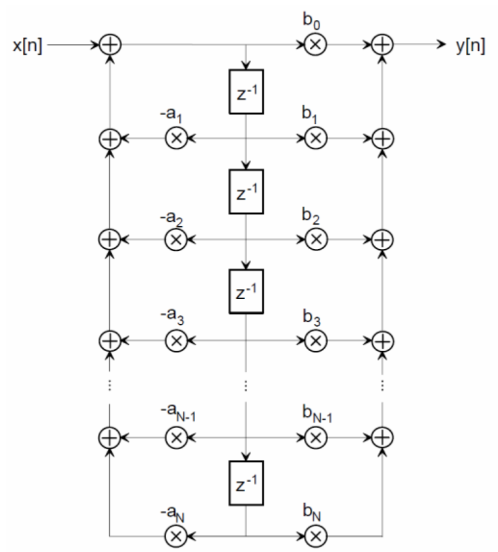


Direktna realizacija 2 - kanonička

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{P_1(z)}{1+P_2(z)} = H_1(z)H_2(z)$$

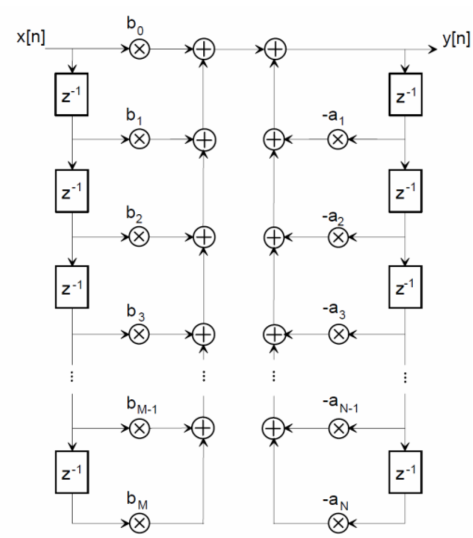
$$H_1(z) = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} = \frac{1}{1+P_2(z)}$$

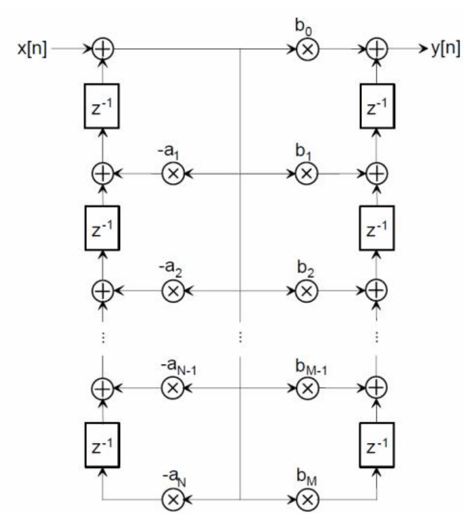
$$H_2(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$



27

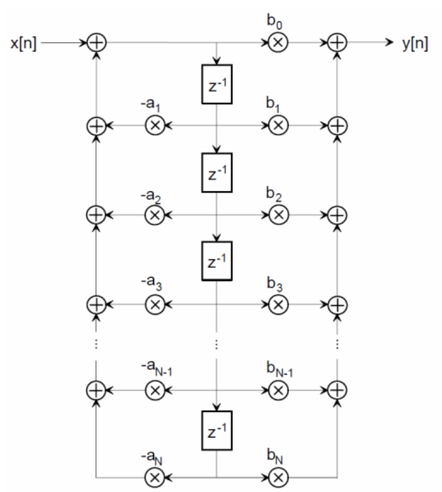
Transponovana direktna realizacija 1

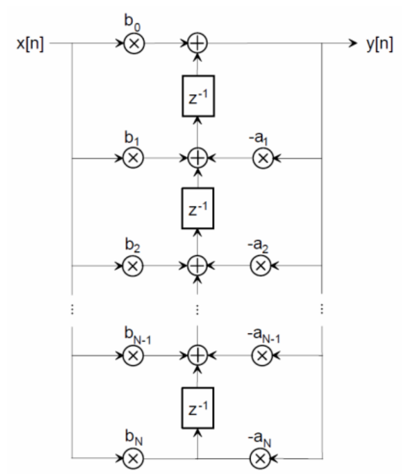




28

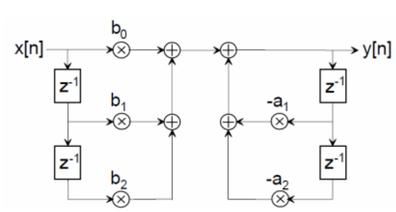
Transponovana direktna realizacija 2

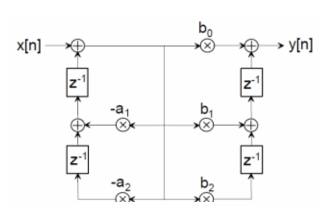


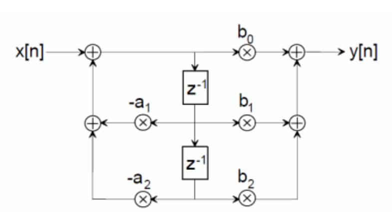


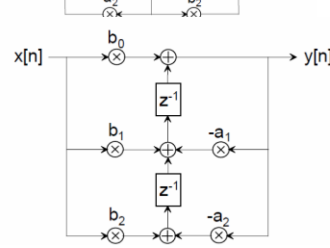
Kaskadna realizacija

$$H(z)=\prod_{k=1}^{N_s} H_k(z)=\prod_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}$$



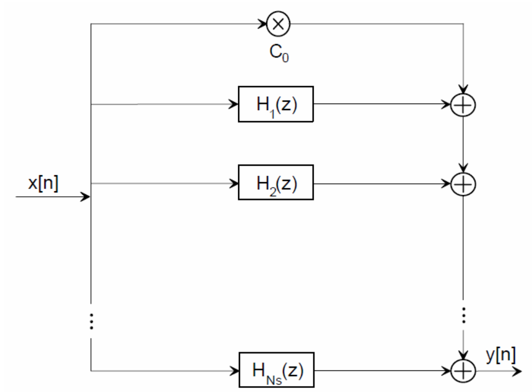






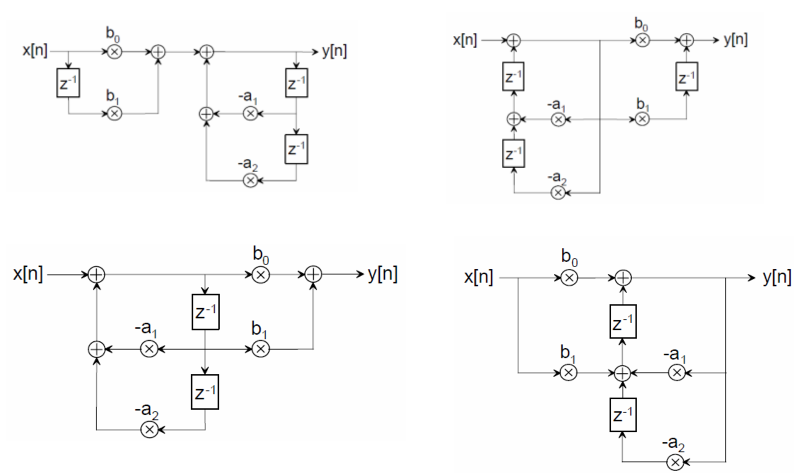
Paralelna realizacija

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{N_s} H_k(z)=\sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k}+\sum_{k=1}^{N_s}\frac{b_{0k}+b_{1k}z^{-1}}{1+a_{1k}z^{-1}+a_{2k}z^{-2}}$$



31

Paralelna realizacija



32

Rešetkasta realizacija

Samo polove

$$H(z)=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N}a_N[k]z^{-k}}=\frac{1}{A_N(z)}$$

diferencna

$$y[n]=x[n]-\sum_{k=1}^{N}\alpha_N[k]y[n-k]$$

Zamena ulaza i izlaza

$$x[n]=y[n]-\sum_{k=1}^{N}\alpha_N[k]x[n-k]$$

$$y[n]=x[n]+\sum_{k=1}^{N}\alpha_N[k]x[n-k]$$

Već viđeno za FIR

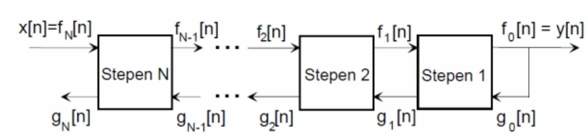
$$H(z)=A_N(z)$$

Rešetkasta realizacija

Zamena ulaza i izlaza

$$x[n]=f_N[n]$$

$$y[n]=f_0[n]$$

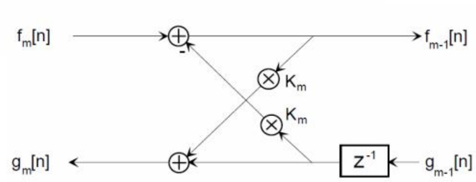


$$f_N[n]=x[n]$$

$$f_{m-1}[n]=f_m[n]-K_m g_{m-1}[n-1],\quad m=N,N-1,\dots,1$$

$$g_m[n]=K_m f_{m-1}[n]+g_{m-1}[n-1],\quad m=N,N-1,\dots,1$$

$$y[n]=f_0[n]=g_0[n]$$



$$f_N[n] = x[n]$$
$$f_{m-1}[n] = f_m[n] - K_m g_{m-1}[n-1], \quad m = N, N-1, \ldots, 1$$
$$g_m[n] = K_m f_{m-1}[n] + g_{m-1}[n-1], \quad m = N, N-1, \ldots, 1$$
$$y[n] = f_0[n] = g_0[n]$$

$$\downarrow$$

$$H_f(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{F_0(z)}{F_N(z)} = \frac{1}{A_N(z)}$$

$$H_b(z) = \frac{G_N(z)}{Y(z)} = \frac{G_N(z)}{G_0(z)} = B_N(z) = z^{-N} A_N(z^{-1})$$

Ako ima i nule

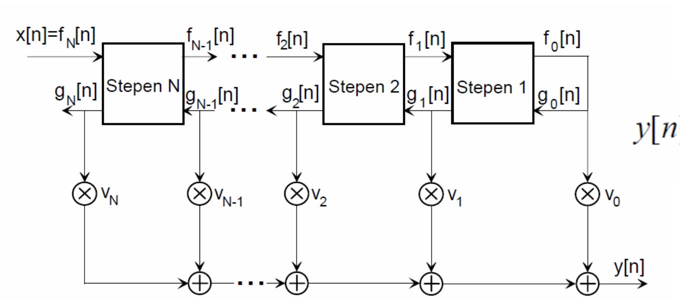
$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} c_M[k] z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_N[k] z^{-k}} = \frac{C_M(z)}{A_N(z)}$$

$$w[n] = x[n] - \sum_{k=1}^{N} \alpha_N[k] w[n-k]$$ polovi

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} c_M[k] w[n-k]$$ nule

U realizaciji opšteg IIR sistema prvo se realizuje rešetkasta struktura sa parametrima K_m, m = 1,…, N , kojom se realizuju polovi funkcije prenosa, a zatim se dodaje lestvičasti deo realizacije kojim se realizuje linearna kombinacija izlaza $g_m[n]$, odnosno nule funkcije prenosa.

Kao rezultat se dobija rešetkasto-lestvičasta realizacija IIR sistema sa nulama i polovima



$$y[n]=\sum_{m=0}^{M} v_m g_m[n]$$

37

Odredjivanje koeficijenata

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\sum_{m=0}^{M} v_m \frac{G_m(z)}{X(z)} \qquad X(z)=F_N(z) \text{ i } F_0(z)=G_0(z)$$

$$H(z)=\sum_{m=0}^{M} v_m \frac{G_m(z)}{G_0(z)}\frac{F_0(z)}{F_N(z)}=\sum_{m=0}^{M} v_m \frac{B_m(z)}{A_N(z)}=\frac{\sum_{m=0}^{M} v_m B_m(z)}{A_N(z)}$$

$$C_M(z)=\sum_{m=0}^{M} v_m B_m(z)$$

$$C_m(z)=\sum_{k=0}^{m-1} v_k B_k(z)+v_m B_m(z)=C_{m-1}(z)+v_m B_m(z)$$

$$v_m=c_m[m], \quad m=0,1,\ldots,M$$

$$C_{m-1}(z)=C_m(z)-v_m B_m(z), \quad m=M,M-1,\ldots,2$$

38